Analyticko-numerické riešenie zmrazovania homogénnych materiálov

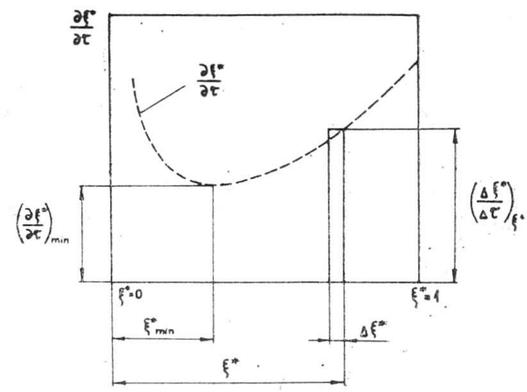
K. MEČÁRIK

Na Strojníckej fakulte, Katedre tepelnej techniky v Bratislave sa rieši čiastková úloha P11-529-264-05/4, koordinátorom ktorej je Výskumný ústav potravinársky v Bratislave. V rámci riešenia úlohy sa čiastkovo rieši zmrazovanie (skupenská premena) potravín, rýchlosť zmrazovania (rýchlosť skupenskej premeny) a ich vplyv na kinetiku kryštalizácie. S cieľom zovšeobecniť skúmané javy boli časy skupenskej premeny pre niektoré geometrické tvary homogenných telies spracované do grafických závislostí pomocou počítača EC 1021. Grafické a tabelárne spracovanie výsledkov v tvare bezrozmerných kritérií umožnilo rýchlo spracovať namerané výsledky [1, 2]. Pokrok vo výpočtovej technike umožnil riešiť niektoré úlohy skupenskej premeny analyticko-numericky, pričom v niektorých zjednodušených prípadoch, vyhovujúcich technickej praxi numerického riešenia integrálu diferenciálnej rovnice bolo možné použiť vreckový programovateľný počítač TEXAS INSTRUMENT SR-56.

Špecifikácia riešeného problému

Problematiku zmrazovania potravín môžme rozdeliť do troch oblastí. Oblasti I a III a ich riešenia sú pre telesá jednoduchých geometrických tvarov známe [3, 4] a presnosť riešenia závisí od presného určenia tepelno-fyzikálnych vlastností materiálu a hraničných podmienok. V úvode uvádzaný problém sa týka oblasti II — zmrazovania, kde dochádza ku skupenskej premene väčšej časti kvapaliny obsiahnutej v produkte.

Ako prvý riešil úlohu zmrazovania Stephan a Neuman (r. 1791), preto sa často nazýva „Stefanovým problémom" [5]. Autori riešili problém zamŕzania nekonečnej dosky pri konštantnej teplote povrchu. Na zmrazovanie potravinových produktov Plank a Nesselman vypracovali podrobnú teóriu riešenia rýchlosti skupenskej premeny a času zamŕzania pre jednoduché geometrické tvary telies kvázistacionárnou metódou. Metóda sa dá použiť iba pre telesá s veľkým obsahom kvapalín. Väčšine potravinárskych produktov presnosť riešenia vyhovuje [6, s. 9]. Pre výpočet času skupenskej premeny v širokom



Obr. 1. Rýchlosť skupenskej premeny v závislosti od bezrozmernej súradnice telesa.

rozmedzí teplôt a kvapaliny obsiahnutej v produkte najlepšie vyhovuje riešenie Megerlina [7] a Stephana [5], ktorý Megerlinovu teóriu rozšíril a doplnil o výpočet skupenskej premeny dodatkovými tepelnými zdrojmi. Presná matematická špecifikácia problému je rozsiahla a bola už podrobne opísaná [6]. Analytické riešenia sa končia rovnicou [1], čo je súčasne definícia rýchlosti skupenskej premeny. Analytické riešenie rovnice [1] nie je známe a integrál sa počíta numericky

$$\frac{\delta\xi^*}{\delta\tau} = \frac{-(1 - \mathrm{Bi}\eta) + \ldots\sqrt{(1 - \mathrm{Bi}\eta)^2 - 2(2\eta - \mathrm{Bi}\eta^2)\mathrm{Bi}/\mathrm{Ph}}}{\xi^{*n}(2\eta - \mathrm{Bi}\eta^2)}, \tag{1}$$

kde doska — $n = 0$, $\eta - (\xi^* - 1)$; valec — $n = 1$, $\eta = \ln\xi^*$; guľa — $n = 2$, $\eta = (\xi^* - 1)/\xi^*$.

Diferenciálnu rovnicu (1) nahradíme rovnicou diferenčnou (2)

$$\frac{\Delta\xi^*}{\Delta\tau} = \frac{-(1 - \mathrm{Bi}\eta) + \ldots\sqrt{(1 - \mathrm{Bi}\eta)^2 - 2(2\eta - \mathrm{Bi}\eta^2)\mathrm{Bi}/\mathrm{Ph}}}{\xi^{*n}(2\eta - \mathrm{Bi}\eta^2)}. \tag{2}$$

Bezrozmerný čas ($\Delta\tau$) skupenskej premeny v mieste ξ^* bezrozmerného elementu vypočítame zo vzťahu (3)

$$\Delta\tau = \Delta\xi^* / \left(\frac{\Delta\xi^*}{\Delta\tau}\right)_{\xi^*}. \tag{3}$$

kde súradnica

$$\xi^* = \sum_{1}^{n-1} \Delta\xi^*. \tag{4}$$

Celkový čas skupenskej premeny τ_0 dostaneme sumáciou čiastkových hodnôt $\Delta\tau$ v rozmedzí od $\xi^* \doteq 0$ po $\xi^* \doteq 1$ (presnosť podľa dĺžky kroku $\Delta\xi^*$)

$$\tau_0 = \sum_{1}^{n-1} \Delta\tau. \tag{5}$$

Tabuľka 1. Program na výpočet času a rýchlosti skupenskej premeny gule

Adresa	Kód	Tlačítko	Adresa	Kód	Tlačítko	Adresa	Kód	Tlačítko	Adresa	Kód	Tlačítko
00	33	STO	25	01	1	50	34	RCL	75	94	=
01	00	0	26	94	=	51	02	2	76	33	STO
02	20	*1/×	27	33	STO	52	94	=	77	04	4
03	33	STO	28	04	4	53	48	$*\sqrt{x}$	78	47	$*x \geq t$
04	08	8	29	43	X^2	54	84	+	79	08	8
05	33	STO	30	74	—	55	34	RCL	80	06	6
06	05	5	31	02	2	56	04	4	81	32	$x > t$
07	12	INV	32	64	X	57	94	=	82	34	RCL
08	27	*dsz	33	34	RCL	58	54	÷	83	05	5
09	09	9	34	01	1	59	34	RCL	84	33	STO
10	09	9	35	64	X	60	05	5	85	06	6
11	34	RCL	36	52	(	61	43	X^2	86	34	RCL
12	05	5	37	02	2	62	54	÷	87	08	8
13	74	—	38	64	X	63	52	(	88	35	SUM
14	01	1	39	34	RCL	64	34	RCL	89	05	5
15	53	)	40	03	3	65	01	1	90	54	÷
16	54	÷	41	74	—	66	64	X	91	34	RCL
17	34	RCL	42	34	RCL	67	34	RCL	92	04	4
18	05	5	43	01	1	68	03	3	93	94	=
19	64	X	44	64	X	69	43	X^2	94	35	SUM
20	33	STO	45	34	RCL	70	74	—	95	07	7
21	03	3	46	03	3	71	02	2	96	22	GTO
22	34	RCL	47	43	X^2	72	64	X	97	00	0
23	01	1	48	53	)	73	34	RCL	98	07	7
24	74	—	49	54	÷	74	03	3	99	41	R/S

Najnepriaznivejší stav nastáva pri minimálnej hodnote skupenskej premeny $\delta\xi^*/\delta\tau$ (alebo $\Delta\xi^*/\Delta\tau$) v mieste ξ^*_{min} od stredu telesa. Preto je vhodné hodnotu ξ^*_{min} vypočítať.

Postup výpočtu

Ako príklad výpočtu integrálu rovnice (1) uvedieme postup výpočtu pomocou programovateľného počítača TEXAS INSTRUMENT SR-56. Vzťah (1) pre hodnotu $\xi^* = 1$ nie je definovaný a výpočet môžeme robiť iba s $n - 1$ krokmi. Napríklad, ak volíme počet krokov $n = 100$, výpočet prebehne s $n - 1$ krokmi. Dĺžka kroku je $\Delta\xi^* = 1/n$, čo pre 100 krokov je $\Delta\xi^* = 0{,}01$.

Tabuľka 1 udáva program pre guľu, tabuľka 2 je dodatok pre nekonečný valec a tabuľka 3 je dodatok pre nekonečnú dosku. Obsadenie pamäťových registrov zobrazuje tabuľka 4. Pred spustením výpočtu musíme do t registra vložiť väčšie číslo (stačí 100), pretože ak platí $x \geqq t$, zastaví sa porovnávanie $\delta\xi^*/\delta\tau$ a v registri t ostane minimálna hodnota $(\Delta\xi^*/\Delta\tau)_{min}$. Pri spracúvaní

Tabuľka 2. Dodatok k programu pre nekonečný valec

Adresa	Kód	Tlačítko
..	..	..
11	34	RCL
12	05	5
13	13	Lnx
14	46	*NOP
15	46	*NOP
16	46	*NOP
17	46	*NOP
18	46	*NOP
..	..	..
58	54	÷
59	34	RCL
60	05	5
61	46	*NOP
..	..	..

Tabuľka 3. Dodatok k programu pre nekonečnú dosku

Adresa	Kód	Tlačítko
..	..	..
11	34	RCL
12	05	5
13	74	—
14	01	1
15	53	)
16	46	*NOP
17	46	*NOP
18	46	*NOP
..	..	..
58	46	*NOP
59	46	*NOP
60	46	*NOP
61	46	*NOP
..	..	..

Tabuľka 4. Obsadenie pamäťových registrov

0 n	1 Bi	2 Ph	3 η	4 $(\mathrm{Bi}\eta - 1)a\ \delta\xi^*/\delta\tau$
5 $\sum_{1}^{n-1} \Delta\xi$	6 ξ^*_{min}	7 $\sum_{1}^{n-1} \Delta\tau_0$	8 $\Delta\xi$	9 voľná

Tabuľka 5. Postup výpočtu

Zadané	Tlačítko	Display
Bi	2 *CMs STO 1	2
Ph	5 STO 2	5
	100 $t \geq x$	0
n	100 RST, R/S	100
	Výpočet ca 4 min 20 s	0,0250951385

Tabuľka 6. Výsledky výpočtu

Vypočítane	Tlačítko	Display
$\xi^*_{\min}$	RCL 6	0,89
τ_0	RCL 7	1,760041601
$\delta\xi^*/\delta\tau$	$x \lessgtr t$	0,3913886347

programu pre nekonečný valec a nekonečnú dosku možno prebytočné operácie *NOP vypustiť za podmienky zmeny adries.

Výpočet sa urobí takto:

1. Natlačí sa program podľa tabuľky 1 s doplnkami z tabuľky 2 a 3 podľa požiadavky.

2. Tlačia sa tlačítka podľa tabuľky 5 so zvolenými hodnotami Bi, Ph, n (v príklade tabuľky 5 je Bi = 2, Ph = 5, n = 100), a spustí výpočet.

3. Tlačením tlačítiek podľa tabuľky 6 z displaya opísať údaje.

Výsledky výpočtu podľa zvoleného príkladu sú

$$\tau_0 = \frac{a_s \, . \, t}{x_0^2} \doteq 1,76 \ .$$

Čas skupenskej premeny pre ľubovoľný polomer gule x_0 a tepelnú vodivosť tuhej fázy a_s

$$t = 1,76 \frac{x_0^2}{a_s}.$$

Minimálna hodnota rýchlosti skupenskej premeny

$$\left(\frac{\delta\xi^*}{\delta\tau}\right)_{\min} \doteq \left(\frac{\Delta\xi^*}{\Delta\tau}\right)_{\min} = \left(\frac{\Delta\dfrac{\xi}{x_0}}{\dfrac{a_s\,\Delta t}{x_0^2}}\right)_{\min} = 0,39 \ .$$

Pre konkrétne hodnoty x_0 a a_s

$$\left(\frac{\Delta\xi}{\Delta t}\right)_{\min} = 0,39 \frac{x_0}{a_s}$$

Súradnica minimálnej hodnoty

$$\xi^*_{\min} = \frac{\xi}{x_0} \doteq 0{,}89 \; ,$$

$$\xi_{\min} = 0{,}89 x_0 \; .$$

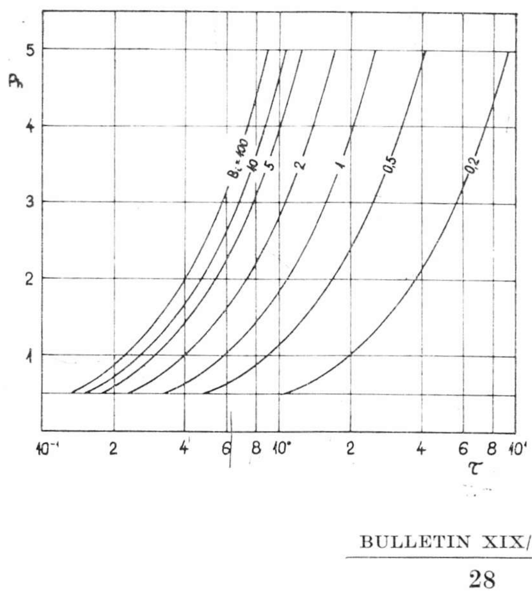
Hodnoty platia pre guľu pri Bi = 2 a Ph = 5.

Spracovanie výsledkov

Výsledky meraní a výpočtov je vhodné spracúvať vo forme, v ktorej majú všeobecnú platnosť. Čas skupenskej premeny t je funkcia týchto rozmerových veličín

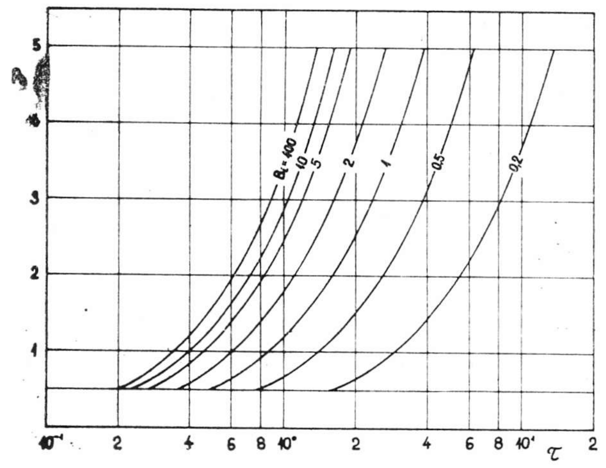
$$t = \mathrm{f}(\alpha, \Delta T, x_0, \varrho, h, \lambda, c) \; . \tag{6}$$

Rovnica (6) obsahuje 8 premenných rozmerových veličín. Hľadanie ich vzájomnej závislosti by bolo komplikované a strácala by sa prehľadnosť pri spracúvaní výsledkov. Použitím teórie podobnosti a teórie rozmerov [8, 9] zredukujeme počet premenných. Rozmery 8 skúmaných veličín možno vyjadriť 4 základnými rozmermi, ktoré sú dimenzionálne nezávislé. Tým sa počet premenných zredukuje na 4 bezrozmerné kritériá [9], ktoré sú od seba nezávislé. Väčší počet kritérií ako 4 nie je vhodné zostavovať, lebo každé ďalšie kritérium by bolo iba kombináciou 4 základných kritérií a tieto by nám nedávali nijaké nové informácie o skúmanom jave. Dá sa dokázať (postup [8]), že skúmaný jav môžeme opísať 4 známymi kritériami Bi, Fo, Ph a ξ^*. Prvé tri kritériá sú pomery rozličných rozmerových veličín a štvrté kritérium je pomer rovnakých rozmerových veličín. Kritériá získané rozmerovou analýzou sú totožné s kritériami

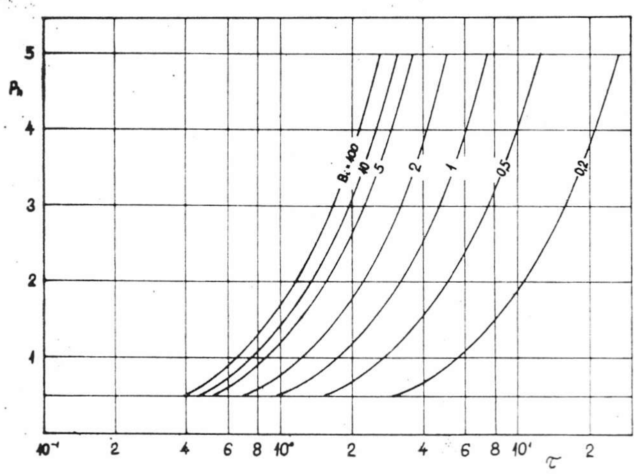


Obr. 2. Bezrozmerný čas skupenskej premeny gule.

Obr. 3. Bezrozmerný čas skupenskej premeny nekonečného valca.



Obr. 4. Bezrozmerný čas skupenskej premeny nekonečnej dosky.



použitými v rovnici (1). Opísané výsledky uvedeným postupom graficky znázorňujú obrázky 2—4. Na grafické spracúvanie výsledkov bolo potrebné počítať veľký počet hodnôt a na zaznamenávanie vypočítaných hodnôt a ich výpočet sa s výhodou použil číslicový počítač EC 1021. Výsledky sú totožné s výsledkami priloženého programu na TI SR-56.

Súhrn

V článku sa rieši výpočet času zmrazovania niektorých telies jednoduchých geometrických tvarov pre široký rozsah teplôt zmrazovania a kvapaliny obsiahnutej v produkte. Riešenie je analyticko-numerické, kde začiatočné riešenia sú analytické a konečné konkrétne riešenia pre jednotlivé tvary telies sa riešia

numericky pomocou počítača. Výsledky riešení z počítača sú spracované v tvare bezrozmerných kritérií graficky, čo umožňuje použiť výsledky priamo na výpočet času zmrazovania potravinových materiálov a tavenie a tuhnutie kovov. Numerický výpočet možno robiť číslicovými počítačmi a v zjednodušenej forme, vyhovujúcej technickej praxi, aj malým číslicovým počítačom TI SR-56, pre ktorý je program tabelárne spracovaný v tomto článku.

Zoznam skratiek

a — teplotová vodivosť tuhej vrstvy
c — merné teplo
h — skupenské teplo
n — parameter; $n = 0$ pre dosku; $n = 1$ pre valec; $n = 2$ pre guľu (tiež n — počet krokov)
t — čas
T — teplota
T_s — teplota skupenskej premeny
T_u — teplota chladiaceho média
x_0 — rozmer telesa
α — súčiniteľ prestupu tepla
η — transformovaná súradnica
λ — teplotná vodivosť tuhej vrstvy
ξ — súradnica tuhej vrstvy
ϱ — merná hmotnosť tuhej vrstvy

Bezrozmerné parametre

Bi — $\alpha x_0/\lambda$: Biotovo kritérium
Ph — $h/c\ (T_s - T_u)$; kritérium skupenskej premeny
τ — at/x_0^2; Fourierovo kritérium
ξ^* — ξ/x_0; bezrozmerná súradnica tuhej vrstvy

Literatúra

1. HAVELSKÝ, V.: Analýza zmrazovacích procesov v závislosti od rýchlosti skupenskej premeny. Kandidátska práca. Bratislava 1978.
2. MEČÁRIK, K. — HAVELSKÝ, V.: Kinetika kryštalizácie a rýchlosť skupenskej premeny pri zmrazovaní potravín. Prům. Potravin, 1978, č. 5, s. 82.274 až 86.278.
3. CARSLAW, H. S. — JEAGER, J. C.: Conduction of Heat in Solids 1959.
4. LYKOV, A. V.: Teoria teplopravodnosti. 1967.
5. STEPHAN, K.: Influence of heat transfer or melting and solidification in forced flow. Int. J. Heat Mass Transfer, *12*, 1969, s. 199—213.
6. MEČÁRIK, K.: Určovanie rýchlosti skupenskej premeny pri zmrazovaní potravín. Bull. VÚP, 1973, č. 3—4, s. 1—11.
7. MEGERLIN, F.: Die analytische Behandlung von Gefriervorgängen. Kältetechnik — Klimatisierung, 1967, č. 12, s. 386—391.
8. MEČÁRIK, K. — HAVELSKÝ, V.: Prestup tepla a aerodynamické odpory v chladičoch vzduchu sprchovaných sekundárnymi roztokmi. Potrav. a chladiaca Techn., 1974, č. 2, s. 44—46.
9. KOŽEŠNÍK, J.: Fysikální podobnost a teorie modelu. Praha 1955.

Аналитическо-численное решение замораживания гомогенных материалов

Резюме

В статьи анализируется расчет времени замораживания некоторых тел простых геометрических форм для широкого температурного интервала замораживания и жидкости в продукте. Решение аналитическо-численное, где начальные решения — аналитические и конечные конкретные решения для определенных форм тел решены численно с помощью вычислительной машины. Результаты решений вычислительной машины разработаны в форме безразмерных критерий графически, что позволяет прямо использовать результаты на расчет времени замораживания продуктовых материалов и плавку и твердение металлов. Численный расчет возможно сделать с помощью цифровых вычислительных машин, и в упрощенной форме, которая удовлетворяет технической практике, с помощью малой цифровой вычислительной машины TISR-56. Программа на вычислительной машине этого типа разработана в статьи.

The analytical-numeric solution of freezing homogeneous materials

Summary

In the article is solved the freezing time calculation of some solids of simple geometric shapes for wide range of freezing temperatures and liquid in product contained. The solution is analytical-numeric, where the initial solutions are analytical and final concrete solutions for single solid shapes are solved numeric with computer. The solution results from computer are elaborated in form of nondimensional criteria graphically, what makes possible to apply the results direct for calculation freezing time of food materials and melting and hardening of metals. The numeric calculation is possible to do with digital computers and in simplified form, suiting for technical practice, also with small digital computer TI SR-56, for which the programme in the article is tabulated.